הרצאה מספר 40
אלגברה 1 מ 104016
הנושא: מטריצות דומות ושמורות דמיון

דר. נתן ולך

הטכניון – הפקולטה למתמטיקה

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

10.1 דמיון מטריצות: ההגדרה

- <u>הגדרה</u>: שתי מטריצות A, B מסדר $n \times n$ הן **דומות** אם קיימת מטריצה הפיכה P מסדר $n \times n$ כך ש־ $A = P^{-1}BP$.
- <u>הערה</u>: יש חוסר סימטריות בהגדרה. נכון יותר כרגע לומר A דומה ל־ B אם קיימת P מתאים.
- <u>אבחנה</u>: אם קיימת P כך ש־ $A = P^{-1}BP$ אז

$$\begin{aligned} PAP^{-1} &= P\left(P^{-1}BP\right)P^{-1} \\ &= \left(PP^{-1}\right)B\left(PP^{-1}\right) \\ &= IBI = B \end{aligned}$$

- ולכן חוסר הסימטריות בהגדרה אינו משמעותי.
- <u>אבחנה</u>: A דומה לעצמה כי $A = I^{-1}AI$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

10.1 דמיון מטריצות: ההגדרה

- <u>דוגמה:</u> נתבונן במטריצות:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

- נגדיר את $A = P^{-1}DP$:

$$\begin{aligned} A = P^{-1}(DP) &= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -19 & -12 \\ 35 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- A ו־ D דומות.
- רק D אלכסונית.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

10.1 דמיון מטריצות: ההגדרה

- בירור:
  - נניח ש־ A דומה ל־ cI (מטריצה סקלרית).
  - אזי קיים P הפיכה, כך ש־ $A = P^{-1}(cI)P$.
  ולכן:

$$A = P^{-1}(cI)P = cP^{-1}P = cI$$

- <u>מסקנה:</u> המטריצה היחידה שדומה ל־ cI היא cI עצמה.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

10.2 דמיון מטריצות הוא יחס שקילות

- <u>הגדרה</u>: יחס $A \sim B$ היא **יחס שקילות** (equivalence relation) אם מתקיימים התנאים:
  1. $A \sim A$. (רפלקסיביות reflexivity)
  2. אם $A \sim B$ אז $B \sim A$. (סימטריה symmetry)
  3. אם $A \sim B$ ו־ $B \sim C$ אז $A \sim C$. (טרנזיטיביות transitivity)
- דוגמאות מוכרות של יחסי שקילות: $x = y$, $x \equiv y \pmod n$, l_1, l_2 הם ישרים מקבילים (בגיאומטריה הרגילה).
- יחס שקילות שהופיע בקורס: A ו־ B הן מטריצות שקולי שורה.
- היחס $x \leq y$ אינו יחס שקילות כי תכונת הסימטריה נכשלת. למשל $5 \leq 7$ אך $7 \not\leq 5$.
- היחס $\vec{u} \perp \vec{v}$ אינו יחס שקילות כי תכונת הטרנזיטיביות נכשלת. למשל אם $\vec{w} = \vec{u} = (0,1),\ \vec{v} = (1,0)$ מתקיים $\vec{u} \perp \vec{v}$ ו־ $\vec{v} \perp \vec{w}$ אך $\vec{u} \not\perp \vec{w}$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

10.2 דמיון מטריצות הוא יחס שקילות

- <u>טענה</u>: היחס A דומה ל־ B הוא יחס שקילות.
- <u>הוכחה</u>: כבר ראינו רפלקסיביות וסימטריה. נבדוק טרנזיטיביות.
  - נניח ש־ A דומה ל־ B, וש־ B דומה ל־ C.
  - אזי קיימים מטריצות הפיכות P, Q כך ש־ $A = P^{-1}BP$, $B = Q^{-1}CQ$.
  - לכן $A = P^{-1}\left(Q^{-1}CQ\right)P = (QP)^{-1}C(QP)$.
  - קיבלנו ש־ A דומה ל־ C. $\square$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

10.3 מטריצות דומות מייצגות אותו אופרטור

- <u>משפט</u>: שתי מטריצות A ו־ B דומות אם"ם הן מייצגות את אותה האופרטור ליניארי.
- <u>הוכחה</u>:
  - נניח קודם ששניהן מייצגות את הא"ל T, כלומר קיימים בסיסים $\mathbf{f},\mathbf{g}$ כך ש־ $A=[T]_{\mathbf{f}}, B=[T]_{\mathbf{g}}$.
  - אזי: $A=[T]_{\mathbf{f}}=(P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}})^{-1}[T]_{\mathbf{g}}P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}=(P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}})^{-1}BP_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}$.
  - לכן A ו־ B דומות.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

10.3 מטריצות דומות מייצגות אותו אופרטור

- <u>משפט</u>: A ו־ B דומות אם"ם הן מייצגות את אותה א"ל.
- <u>הוכחת הכיוון השני:</u>
  - עכשיו נניח ש־ A ו־ B דומות ומסדר $n \times n$.
  - לכן קיימת מטריצה P הפיכה כך ש־ $A = P^{-1}BP$.
  - נתבונן בא"ל $T_B : F^n \to F^n$ המוגדר ע"י $T_B(\vec{x}) = B\vec{x}$.
  - $B = [T_B]_{\mathbf{e}}$ מטריצה מייצגת של T_B יחסית לבסיס הסטנדרטי $\mathbf{e}$ של F^n.
  - נגדיר את הקבוצה $\mathbf{f} = \{f_j = P_{\cdot j}\}$ (עמודות P).
  - $\mathbf{f}$ בסיס של F^n כי העמודות של מט' הפיכה הן תמיד בסיס.
  - לפי בחירה זה $P = P_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}$.
  - לפי המשפטים על מטריצת מעבר מתקיים:
    $A = P^{-1}BP = (P_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}})^{-1}[T_B]_{\mathbf{e}}P_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}} = [T_B]_{\mathbf{f}}$.
  - לכן A ו־ B שתיהן מייצגות את הא"ל T_B. $\square$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

10.4 למטריצות דומות הדרגות שוות

- **תזכורת: משפט:** אם $T : V \to V$ א"ל, ו־ B בסיס סדור של V, אז $\text{rank}(T) = \text{rank}([T]_B)$.
- **תזכורת:** $\text{Im}(T) \cong \text{colspace}([T]_B)$.
- **טענה:** אם שתי מטריצות A ו־ B דומות אזי $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.
- **הוכחה:** שתיהן מייצגות את T_A, ולכן $\text{rank}(A) = \text{rank}(T_A) = \text{rank}(B)$. $\square$
- **הערה:** ההיפך אינו נכון. למשל: $A = I, B = 2I$ הן שתי מטריצות מדרגה n, אך אינן דומות.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

10.5 למטריצות דומות העקבות שוות

- הגדרה: עבור מטריצה ריבועית A מסדר n **העקבה** (trace) היא $\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ (סכום אברי האלכסון הראשי).
- משפט: אם $A, B \in M_{n\times n}$ אז $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
- טענה: אם שתי מטריצות A ו־ B דומות אזי $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.
- הוכחת הטענה: תהא P מטריצה הפיכה כך ש־ $A = P^{-1}BP$.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A) &= \mathrm{tr}(P^{-1}BP) = \mathrm{tr}\left((P^{-1}B)P\right) = \mathrm{tr}\left(P(P^{-1}B)\right)\\ &= \mathrm{tr}\left((PP^{-1})B\right) = \mathrm{tr}\left(IB\right) = \mathrm{tr}\left(B\right)\end{aligned}$$

- הערה: ההיפך אינו נכון. למשל: $A = I_2, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ הן שתי מטריצות בעלות עקבה 2, אך אינן דומות. (הדרגות שונות.)

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

10.5 למטריצות דומות העקבות שוות

- **משפט:** אם $A, B \in M_{n\times n}$ אז $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
- **הוכחה:**

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AB) &= \sum_{k=1}^{n}(AB)_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{jk}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk}a_{kj}\right) = \sum_{j=1}^{n}(BA)_{jj} = \mathrm{tr}(BA)\end{aligned}$$

- בתוך הסוגריים: שורה k של A כפול עמודה k של B.
- הפיכת סדר הסכימה.
- בתוך הסוגריים: שורה j של B כפול עמודה j של A.

$\square$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

10.6 למטריצות דומות ה־det שוות

- <u>תזכורת:</u>

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
2. אם A מטריצה אלכסונית, אז $\det(A)$ שווה למכפילת אברי האלכסון
3. אם A מטריצה הפיכה, אז $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

- התכונות האלו מספיקות כדי להוכיח שלמטריצות דומות $\det(A) = \det(B)$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

10.6 למטריצות דומות ה־det שוות

- <u>טענה:</u> אם שתי מטריצות A ו־ B דומות אזי $\det(A) = \det(B)$.
- <u>הוכחה:</u> תהא P מטריצה הפיכה כך ש־ $A = P^{-1}BP$.

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(P^{-1}BP) = \det(P^{-1})\det(B)\det(P) \\ &= \det(B)\end{aligned}$$

- <u>הערה:</u> ההיפך אינו נכון. למשל: $A = 2I_2, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ הן שתי מטריצות בעלות דטרמיננטה 4, אך אינן דומות. (העקבות שונות.)

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

10.7 לכסינות או אי־לכסינות

- הגדרה: מטריצה ריבועית A היא **לכסינה** (diagonalizable) אם קיים מטריצה הפיכה P כך ש־ $P^{-1}AP$ היא מטריצה אלכסונית.
- טענה: אם שתי מטריצות A ו־ B דומות אזי או שתיהן לכסינות או שתיהן אינן לכסינות.
- הוכחה: נראה שאם A לכסינה, גם B לכסינה. (וגם להיפך.)
  - נניח ש־ A לכסינה, כלומר קיים מטריצה הפיכה P כך ש־ $D = P^{-1}AP$ היא מטריצה אלכסונית.
  - מכיון ש־ A ו־ B דומות קיים מטריצה הפיכה Q כך ש־ $A = Q^{-1}BQ$.
  - אזי גם B לכסינה, כי:

$$D = P^{-1}AP = P^{-1}\left(Q^{-1}BQ\right)P = (QP)^{-1}B(QP).$$

$\square$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

10.7 לכסינות או אי־לכסינות

- הגדרה: אופרטור ליניארי $T : V \to V$ על מרחב נוצר סופית

לכסין (ניתן לליכסון) (diagonalizable) אם קיים בסיס סדור $\mathbf{f}$ למרחב V כך בהמטריצה המייצגת $[T]_{\mathbf{f}}$ אלכסונית.

- מסקנה: יהא $T : V \to V$ א"ל על מרחב נוצר סופית, ויהא $\mathbf{f}$ בסיס סדור למרחב V.
אזי T לכסין אם"ם $[T]_{\mathbf{f}}$ לכסינה.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

$AP = PD$ 10.8

- תהי A מטריצה לכסינה הדומה למטריצה האלכסונית D.
- ניתן להכפיל את המשוואה $D = P^{-1}AP$ ב־ P מצד שמאל ולקבל: $PD = PP^{-1}AP = AP$.
- נתבונן במטריצות:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- קל לבדוק:

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = PD$$

- A אינה לכסינה. (בינתיים יש להאמין למרצה.)
- למה אין כאן סתירה?

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

10.9 דמיון: פולינום אופייני וערכים עצמיים

- הגדרה: תהא A מטריצה ריבועית מסדר n.

  הפולינום האופייני של A היא הפולינום

  $$\Delta_A(\lambda) = p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

- טענה: אם שתי מטריצות A ו־ B דומות אזי $\Delta_A(\lambda) = \Delta_B(\lambda)$.
- הוכחה: תהא P מטריצה הפיכה כך ש־ $A = P^{-1}BP$.

$$\begin{aligned}
\Delta_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \det(\lambda P^{-1}IP - P^{-1}BP) \\
&= \det\left(P^{-1}\left(\lambda I - B\right)P\right) \\
&= \det(P^{-1})\det(\lambda I - B)\det(P) \\
&= \det(\lambda I - B) = \Delta_B(\lambda)
\end{aligned}$$

- הגדרה זמנית: לשורש של הפ"א קוראים ערך עצמי של A.
- מסקנה: למטריצות דומות יש אותם הערכים העצמיים.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

10.10 סיכום: שמורות דמיון

- <u>סיכום (שמורות דמיון)</u>: אם A ו־ B מטריצות דומות, אזי:

1. $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.
2. $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.
3. $\det(A) = \det(B)$.
4. $\Delta_A(\lambda) = \Delta_B(\lambda)$.
5. ל־ A ו־ B אותם ערכים עצמיים.
6. A ו־ B הן לכסינות או אי־לכסינות ביחד.

התנאים הכרחיים
אך לא מספיקים.

- <u>אבחנה</u>: אם לפחות אחד מבין התנאים ברשימה אינה מתקיימת אז A ו־ B אינן דומות.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- <u>הערה</u>: להלן דוגמה של שתי מטריצות שאינן לכסינות המקיימות את תנאים 1 עד 5. לולא A ו־ B היו דומות, אז גם $I - A$ ו־ $I - B$ היו דומות. אך $\operatorname{rank}(I - A) = 2 \neq 1 = \operatorname{rank}(I - B)$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות